

# Petite Histoire d'une Idée Bizarre : les Courbes et les Surfaces de Bézier

Christophe Rabut

*Soumis à l'ENSAM*

*pour les Actes de la journée du 30 novembre 2000, en hommage à Pierre Bézier  
13 mars 2001*

## Résumé

Cet article présente l'essentiel des tenants et aboutissants de l'invention des "courbes de Bézier". On présente tout d'abord le contexte qui a permis cette invention, ainsi qu'une description rapide des motivations de Pierre Bézier ; on décrit ensuite le principe de la méthode et ses principales propriétés, puis le contexte qui a entouré la mise au point de la méthode ; enfin on examine certaines méthodes actuelles de génération des courbes et surfaces, qui sont une conséquence, ou une généralisation, des courbes de Bézier. Le tout essaie d'être accessible à des non-spécialistes du domaine.

## 1. Introduction

Les "courbes de Bézier" ont été inventées dans le cadre de l'industrie automobile, et sont très rapidement sorties de ce cadre ; leur principe est maintenant utilisé dans tout ce qui touche la conception et la représentation des courbes et surfaces quelconques. Cela concerne beaucoup de domaines, en particulier tout ce qui touche à la Conception et à la Fabrication Assistée par Ordinateur ("CFAO") et tout ce qui touche aux jeux vidéos. Outre une présentation générale de la méthode, cet article cherche à expliquer les circonstances de cette invention et de sa première mise en œuvre industrielle, et à montrer rapidement les principales extensions actuellement utilisées.

Cet article s'appuie essentiellement sur les deux articles "*Petite histoire d'une idée bizarre*" ([1]) et "*Imaginaire inventique créatique innovatique systémique productique, etc.*" ([2]) écrits par Pierre Bézier, sur deux lettres que Pierre Bézier a envoyées à l'auteur de ces lignes ([3]), ainsi que sur les contacts que ce dernier a eus avec les enfants de Pierre Bézier et plusieurs collaborateurs de Pierre Bézier. Que toutes ces personnes soient remerciées de leur aide et de leur collaboration.

## 2. Motivations

### 2.1 Introduction des machines à commande numérique :

Après avoir reçu une formation d'ingénieur à l'ENSAM (Paris, 1927), et après avoir effectué une année complémentaire à Sup d'Elec (1931), Pierre Bézier fut recruté chez Renault en 1933 comme ajusteur-outilleur. Il est ensuite passé au bureau d'études, service qui avait à choisir, à concevoir et à mettre en œuvre les moyens de production des pièces mécaniques.

Dans les années 1960 sont apparues les machines à commande numérique. Pour pouvoir les utiliser, il fallait "numériser" la phase de fabrication. Pour cela, il y avait (au moins) trois possibilités :

**a.** Partir des plans conçus et réalisés par les dessinateurs, et déterminer les coordonnées d'un grand nombre de points des courbes et des surfaces ainsi conçues. Ces coordonnées seraient ensuite transmises aux machines à commande numérique pour la fabrication des composants (ou, mais cela revient au même, pour la fabrication des outils permettant la fabrication des composants).

**b.** Partir des plans conçus et réalisés par les dessinateurs, et déterminer des expressions mathématiques approchant au plus près les courbes et les surfaces représentées par ces plans. Les valeurs numériques transmises aux machines à commande numérique seraient alors calculées à partir de ces expressions mathématiques.

**c.** Concevoir, dès le bureau d'études, les formes des voitures (et de leurs composants) directement à l'aide d'expressions mathématiques. Le résultat de ces travaux serait alors directement transmis -sans approximation et sans erreur- aux différents services qui les utilisent, et en particulier aux machines à commande numérique chargées de la réalisation des plans comme à celles de la fabrication des pièces ou des outils devant fabriquer ces pièces.

Examinons rapidement les avantages et inconvénients de chacune de ces méthodes :

Bien qu'assez naturelle a priori, la méthode **a.** présente de nombreux inconvénients, en particulier un très grand nombre de points à déterminer (à la main, car bien sûr les scanners n'existaient pas à cette époque) et à transmettre (surtout pour les surfaces !).

La méthode **b.** ne peut permettre de reproduire exactement les courbes créées par les dessinateurs, qui sont souvent réalisées en partie à la main ou à l'aide d'outils confectionnés de façon spécifique, et non mathématique. Ainsi : "*Les courbes étaient matérialisées par des calibres en poirier, de rayon constant, longs de plusieurs mètres, et par des pistolets à courbure variable ; certains projeteurs en avaient eux-mêmes tracé la forme à l'aide de recettes, parfois transmises par un ancien, parfois imaginées par eux mêmes, et auxquelles ils attribuaient tant de vertus qu'ils entendaient bien en conserver le secret. L'un d'eux parlait avec un air à la fois mystérieux et satisfait des pistolets qu'il s'était fabriqués lors de l'étude de la juvaquatre.*" ([1], p.258). Bien que réalisable (et envisagé chez d'autres constructeurs de voitures), cette méthode ne plaisait pas à Pierre Bézier, car elle nécessite une approximation des formes conçues par les bureaux d'études, ce qui aurait amplifié plutôt que résolu les transformations que subissait un modèle au fur et à mesure de sa transmission entre les différents services.

La solution **c.** est bien sûr beaucoup plus ambitieuse, et elle a eu dès le départ la préférence de Pierre Bézier : elle permet une transmission exacte des informations (sous forme de nombres et d'équations) entre tous les services concernés, et assure une parfaite cohérence à tous les stades du processus. Pierre Bézier a tout de suite vu là une occasion d'améliorer l'ensemble du processus et non la seule dernière étape de la fabrication, ce qui lui paraissait fondamental. Il pensait en effet que cela était nécessaire et serait très bénéfique : "*Ainsi, au cours de mes contacts avec les travaux de carrosserie, j'avais acquis la certitude que le manque de rigueur des définitions avait pour conséquence l'obligation d'effectuer sur place de nombreuses retouches, ce qui allongeait les délais et coûtait fort cher.*" ([1], p.260), puis : "*Trente années d'expérience dans une spécialité exigeante m'avaient appris que, lorsqu'apparaît un moyen nouveau, on peut tenter de l'appliquer, de-ci, de-là, dans quelques phases d'une séquence classique d'opérations. On y gagne un peu sur la précision, le délai ou le prix. Le bénéfice est de quelques centièmes sur l'ensemble du processus, ce qui n'est pas à dédaigner. Une autre démarche est d'imaginer de bout en bout une solution tirant tout le parti possible de la technique nouvelle. On n'invente pas l'automobile en plaçant un moteur à pétrole sur une voiture*

à cheval” ([1],p.262). Enfin : “Ainsi, du bureau d’études aux méthodes, puis au modelage, à la fonderie et à l’atelier d’outillage, les informations circuleraient sans erreur ni distorsion” ([1], p.262).

De plus, agrandir une partie d’une pièce (visualiser en gros plan un détail important) devient alors particulièrement facile, puisqu’il suffit de recalculer davantage de points de cette partie, et de les représenter à une nouvelle échelle ; l’agrandissement n’introduit alors aucune erreur supplémentaire, au contraire d’une représentation point par point comme la méthode **a**.

Mais ce n’était pas une solution simple, et elle remettait en cause des habitudes et des méthodes de travail éprouvées par des années de fonctionnement...

Pour pouvoir la mettre en œuvre, et avoir son acceptation par les différents corps de métier concernés, il était nécessaire de déterminer une méthode qui entraîne un mode de travail “naturel” pour les dessinateurs, lesquels bien sûr ne peuvent travailler directement en termes d’équations et de nombres, surtout si ceux-ci n’ont pas de signification graphique intuitive. Il fallait donc trouver une méthode qui soit bien comprise par des non-scientifiques, et qui permette aux dessinateurs de travailler graphiquement puis d’avoir une traduction simple de ce travail en termes d’équations. C’est ce que réalisent de façon très élégante les “courbes et surfaces de Bézier” et les “courbes et surfaces B-splines”, grâce aux “points de contrôle” et aux “polygones de contrôle”.

## **2.2 Principales idées neuves**

Examinons maintenant, sur un plan plus scientifique, quelles sont les principales préoccupations et idées neuves qui ont conduit aux “courbes de Bézier” :

### **2.2.1 Diminuer le nombre de paramètres**

Plutôt que de représenter une courbe par un très grand nombre de paramètres (typiquement les coordonnées de beaucoup de ses points), la première idée consiste à déterminer une courbe qui dépende de peu de paramètres et qui ait une forme satisfaisante. Ceci suppose d’accepter de ne pas reproduire exactement n’importe quelle courbe, mais, ou bien d’approcher une courbe existante, ou mieux de concevoir une courbe directement avec ce petit nombre de paramètres. Ainsi par exemple, alors que pour représenter précisément la courbe de la figure 1 ci-dessous on a besoin de, disons, 500 points, on peut penser que les seuls 5 points de la courbe de la figure 2 permettent, en déterminant une courbe qui passe par ces seuls 5 points, d’obtenir une courbe assez proche de la courbe originale. Remarquons que si la courbe est, dès sa conception, définie comme passant par certains points (par exemple un polynôme de degré  $n$  passant par  $n+1$  points choisis), il peut y avoir, moyennant des précisions mathématiques suffisantes, existence et unicité de la courbe en question.

### **2.2.2 Ne pas interpoler, mais utiliser des “points de contrôle”**

Passer par des points donnés pose cependant un problème de “stabilité”, c’est à dire que dans certains cas, une faible variation d’un point peut entraîner une importante variation de la courbe. C’est d’ailleurs ce qui se passe avec les polynômes (phénomène connu sous le nom de “phénomène de Runge”), qui sont des fonctions simples, et seront justement les fonctions utilisées pour représenter les courbes.

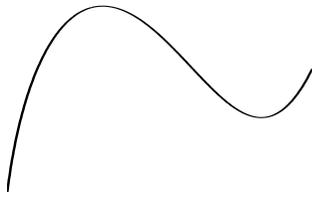


Figure 1

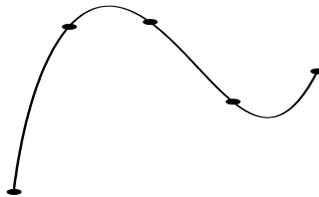


Figure 2

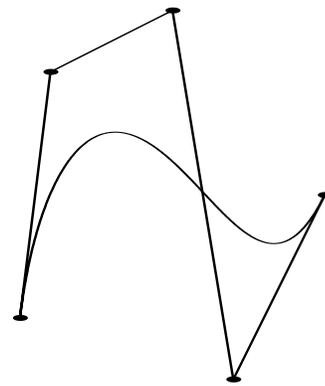


Figure 3

La seconde idée neuve et importante consiste à ne pas s'imposer de passer par des points, mais d'utiliser des points pour "contrôler" la courbe obtenue : en faisant varier les points de contrôle, on fait varier la courbe ; certes la courbe ne passe pas, en général, par les points de contrôle, mais il suffit de déterminer les points de contrôle en fonction de la courbe que l'on désire obtenir. Ainsi, la courbe de la figure 3 ci-dessus est déterminée à l'aide de 5 "points de contrôle" (les extrémités des quatre segments de droite). Compte tenu du choix de la définition de la courbe à partir des points de contrôle, ceci résout entièrement le problème de l'instabilité mentionné plus haut.

### 2.2.3 Travailler avec des "polynômes paramétriques"

Les fonctions les plus simples à calculer (rappelons-nous que les ordinateurs de l'époque sont lents et de faible capacité !) sont les polynômes. L'idée est donc de travailler avec des polynômes.

Cependant, si les courbes sont les courbes représentatives de polynômes, on ne pourra obtenir que des courbes de type fonction, en particulier on ne pourra pas obtenir de courbes ayant deux points différents sur une même verticale. Par contre les courbes paramétriques permettent d'obtenir de telles courbes ; ainsi la courbe de la figure 4 est la courbe représentative d'un polynôme (équation  $y = p(x)$  où  $p$  est un polynôme), tandis que la courbe de la figure 5 est une "courbe paramétrique polynomiale" (équations  $x = p(t)$  et  $y = q(t)$  où  $t$  est un paramètre et  $p$  et  $q$  sont des polynômes), c'est à dire une courbe représentative d'un polynôme paramétrique (ici,  $(p, q)$ ). Ceci est d'ailleurs facilement généralisable pour des courbes dans l'espace (équations  $x = p(t)$ ,  $y = q(t)$ ,  $z = r(t)$  où  $t$  est un paramètre et  $p$ ,  $q$  et  $r$  sont des polynômes).

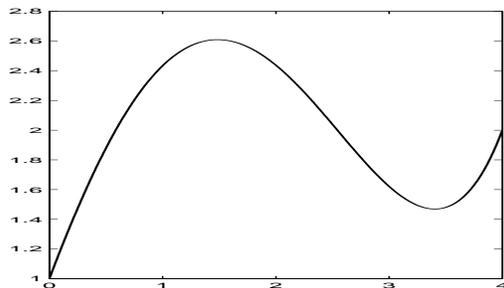


Figure 4

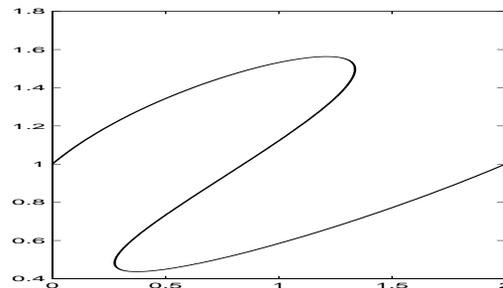


Figure 5

### 2.2.4 Déformation de l'espace

Le problème est maintenant de savoir comment déformer une courbe donnée, de façon à lui faire prendre la forme que l'on veut. Plutôt que de juxtaposer différentes courbes (comme des arcs de cercle, de parabole, des segments de droite), l'idée a été de déformer

l'ensemble d'une courbe donnée, par déformation du référentiel qui la contient, ou, ce qui revient au même, de déformer l'ensemble de l'espace. "A première vue, il semble moins logique de déformer tout un référentiel plutôt qu'une seule ligne, mais il faut considérer que l'on a besoin, dans la suite des travaux, de modifier l'ensemble d'un tracé composé de plusieurs arcs de courbes et qu'alors il sera plus simple de le faire d'un seul coup en agissant sur leur espace commun plutôt que sur chacun séparément." ([3]).

Concrètement, examinons les deux graphes de la figure 6 :

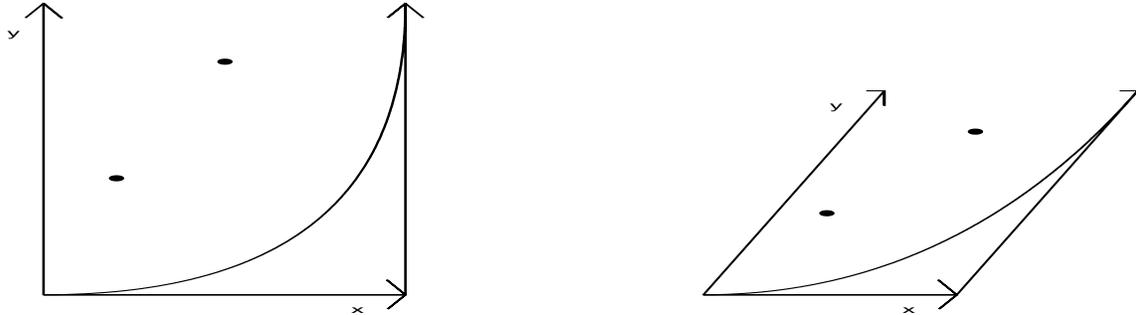


Figure 6

la courbe de gauche, un quart-cercle, est transformée en la courbe de droite, par une déformation du repère (diminution de la longueur du vecteur unitaire de l'axe des  $x$ , inclinaison de l'autre axe). Remarquons que c'est tout l'espace qui est ainsi "déformé" par la modification des axes ; ainsi, les deux points indiqués sont "déplacés" comme indiqué sur la figure de droite.

Evidemment, deux axes ne permettent pas de faire toute déformation que l'on veut... il faut passer à davantage de "degrés de liberté". Pour obtenir davantage de possibilités de déformation, Pierre Bézier se situe d'abord dans l'espace à trois dimensions, qu'il projette ensuite pour obtenir une courbe à deux dimensions, ainsi qu'il est montré dans les courbes suivantes :

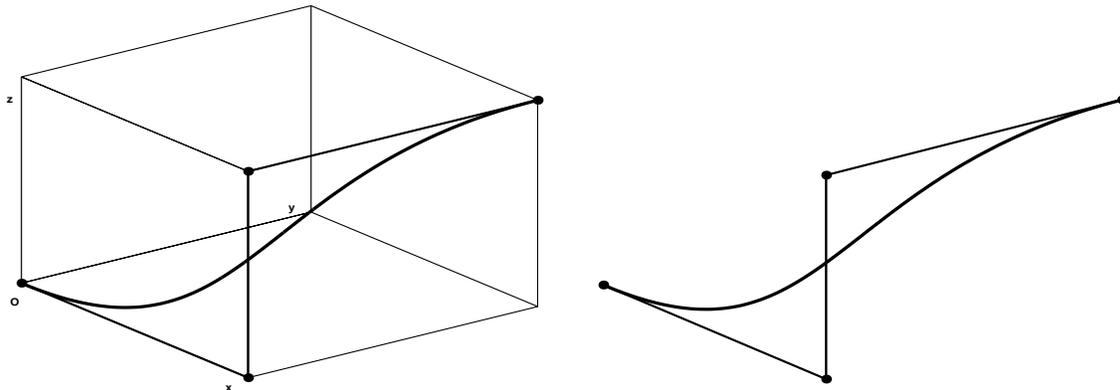


Figure 7

pour déformer la courbe de droite, il suffit maintenant de modifier les axes de la courbe de gauche (ou le cube formé par ces axes), puis de projeter la courbe ainsi obtenue ; ce qui donne les deux figures suivantes :

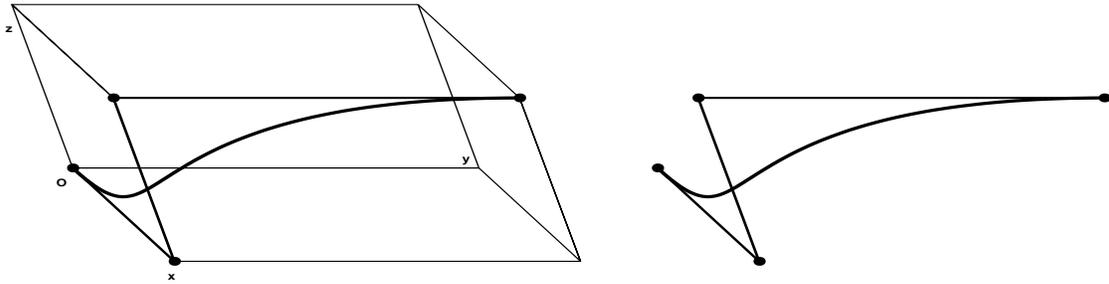


Figure 8

C'est ce que Pierre Bézier voulait dire lorsqu'il parlait de "déformation de l'espace pour déformer une courbe". Evidemment, il ne suffit pas de travailler à trois variables, mais pour avoir davantage de possibilités de modification, il faut travailler dans un espace de dimension supérieure. Ainsi "Pour augmenter la variété des courbes disponibles, on songe tout naturellement à accroître le nombre de côtés des polygones caractéristiques, ce qui revient à inscrire la courbe fondamentale dans un espace abstrait hyperdimensionnel." ([1], p.264).

Quelles courbes prendre ? C'est là un point essentiel, car bien sûr la forme des courbes, mais aussi le volume de calculs, en dépendra directement. "J'avais choisi comme courbe de base, c'était une idée de mécanicien, l'intersection de deux quarts de cylindres circulaires (Fig. 9) ; l'ordinateur aurait développé les fonctions harmoniques pour calculer les points courants ; mais les opérations se sont compliquées dès que l'on a voulu utiliser des référentiels ayant plus de trois dimensions ; l'emploi des fonctions algébriques s'est alors naturellement imposé.

En son origine  $(0,0,0)$ , la courbe de la figure 9 est tangente à  $Ox$  et osculatrice au plan  $xOy$  ; en  $(1,1,1)$ , sa tangente est parallèle à  $Oz$  et son plan osculateur à  $yOz$  ; si l'on imagine qu'un point la parcourt à vitesse constante, l'on conclut que les vitesses de ses projections sur les trois arêtes  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  du parallélépipède sont représentées par les diagrammes de la Fig. 10, la solution la plus simple étant constituée par trois fonctions cubiques  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ , et la représentation du point courant a la forme  $\bar{P}(u) = \sum_{i=1}^3 a_i f_i(u)$  . " [3].

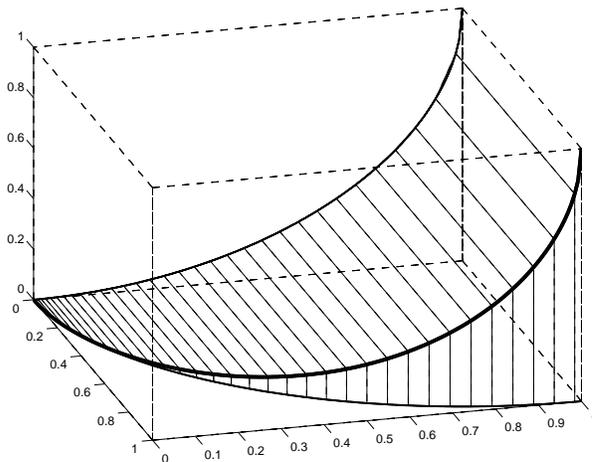


Figure 9

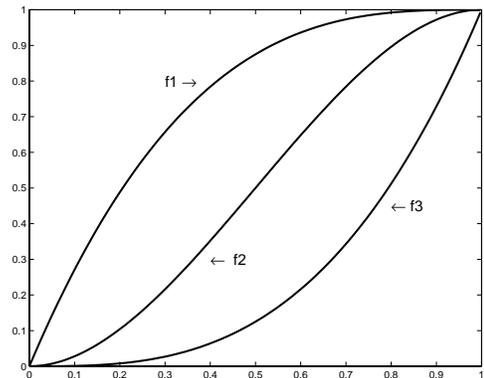


Figure 10

Finalement, les courbes de base choisies sont polynomiales et satisfont les relations suivantes ( $n$  est la dimension de l'espace, ou ce qui revient au même, il y a  $n$  vecteurs de

contrôle, ou  $n + 1$  points de contrôle) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } t \text{ compris entre } 0 \text{ et } 1, \quad f_{n,0}(t) = 1 \\ \text{Pour } i = 1, 2, \dots, n : \\ \quad f_{n,i}(0) = 0, \quad f_{n,i}(1) = 1 \\ \text{Pour } j = 1, 2, \dots, i - 1 : \quad \frac{d^j f_{n,i}}{dt^j}(0) = 0 \\ \text{Pour } j = 1, 2, \dots, n - i : \quad \frac{d^j f_{n,i}}{dt^j}(1) = 0 \end{array} \right.$$

ce qui donne les fonctions  $f_{n,i}$  suivantes :

$$f_{n,i}(t) = \frac{(-t)^i}{(i-1)!} \frac{d^{i-1} \left( \frac{(1-t)^{n-1}}{t} \right)}{dt^{i-1}} = \sum_{j=i}^n (-1)^{i+j} \frac{m!}{(i-1)! (j-i)! (m-j)! j} t^j$$

Enfin, les équations des courbes s'écrivent sous la forme

$$C(t) = P_0 P_1 f_{n,1}(t) + P_1 P_2 f_{n,2}(t) + \dots + P_{n-1} P_n f_{n,n}(t) \quad (\text{A})$$

où les  $P_i P_{i+1}$  sont les vecteurs de base de l'hyper-espace déformé, qui commandent donc la forme de la courbe (par exemple dans le cas de la figure 3, les 4 vecteurs portés par les 4 segments de la figure).

Facétieux, mais aussi en recherche d'une caution relative à ces fonctions, Pierre Bézier attribua la paternité de ces fonctions à un imaginaire "Onésime Durand" : "*Il est toujours utile, à qui veut donner l'impression d'être sérieux, de se placer sous l'égide d'un grand ancêtre ; je mis donc ces fonctions sous l'invocation d'un professeur que je baptisai Onésime Durand, bien certain que son patronyme, sinon son prénom, figurait sûrement au Panthéon des mathématiciens.*" ([1], p.264).

### 3. Expression et principales propriétés des courbes et des surfaces de Bézier

#### 3.1 Expression des courbes de Bézier

Ce n'est cependant pas sous cette forme que nous connaissons actuellement les "courbes de Bézier". Nous utilisons les "polynômes de Bernstein" : le  $i^{\text{ème}}$  polynôme de Bernstein de degré  $n$  est défini par :

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{i! (n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} \quad (\text{B})$$

et les courbes de Bézier sont définies par  $C(t) = P_0 B_0^n(t) + P_1 B_1^n(t) + \dots + P_n B_n^n(t)$ , ce qui s'écrit de façon plus condensée sous la forme :  $C(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t)$ , ou, de façon plus détaillée, si les points  $P_i$  sont de la forme  $P_i = (x_i, y_i)$  :

$$C(t) = \begin{vmatrix} x_0 B_0^n(t) + x_1 B_1^n(t) + \dots + x_n B_n^n(t) \\ y_0 B_0^n(t) + y_1 B_1^n(t) + \dots + y_n B_n^n(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^n x_i B_i^n(t) \\ \sum_{i=0}^n y_i B_i^n(t) \end{vmatrix} \quad (\text{C})$$

Ceci est équivalent à la forme précédente, car on remarque facilement que si  $C(t)$  est défini par (A), on a aussi

$$C(t) = \sum_{i=1}^n P_i P_{i-1} f_{n,i}(t) = \sum_{i=1}^n (P_i - P_{i-1}) f_{n,i}(t) = \sum_{i=0}^n P_i (f_{n,i}(t) - f_{n,i+1}(t))$$

(nous avons posé  $f_{n,n+1}(t) = 0$ ), ce qui est précisément la forme (C) puisque l'on vérifie facilement que l'on a  $B_i^n(t) = f_{n,i}(t) - f_{n,i+1}(t)$ .

Les points  $(P_i)_{i=0,\dots,n}$  sont appelés “points de contrôle”, ou encore “points de Bézier” de la “courbe de Bézier”, le polygone obtenu en joignant les points  $P_i$  successifs est appelé “polygone de contrôle”, ou “polygone de Bézier”.

L'usage des polynômes de Bernstein a été introduit par Robin Forrest en 1970, dans le premier article faisant état du nom “polynômes de Bézier” [4].

### 3.2 Quelques propriétés des courbes de Bézier

On trouvera dans ce § quelques propriétés importantes des courbes de Bézier. Certaines démonstrations sont présentées par Pierre-Jean Laurent et Marie-Laurence Mazure dans [6], avec quelques autres propriétés.

#### 3.2.1 “Suivre l'allure du polygone de contrôle”

La première propriété, la plus importante sans doute, est que la courbe ainsi obtenue suit la forme générale de son polygone de contrôle. Cette propriété est essentielle, car pour obtenir une courbe de forme approximative donnée, un dessinateur pourra construire un polygone de contrôle ayant approximativement cette forme ; des modifications du polygone de contrôle lui permettront ensuite de modifier la courbe jusqu'à obtenir la forme désirée. La figure 11 ci-dessous était utilisée par Pierre Bézier pour illustrer cette propriété ([1, p.263]).

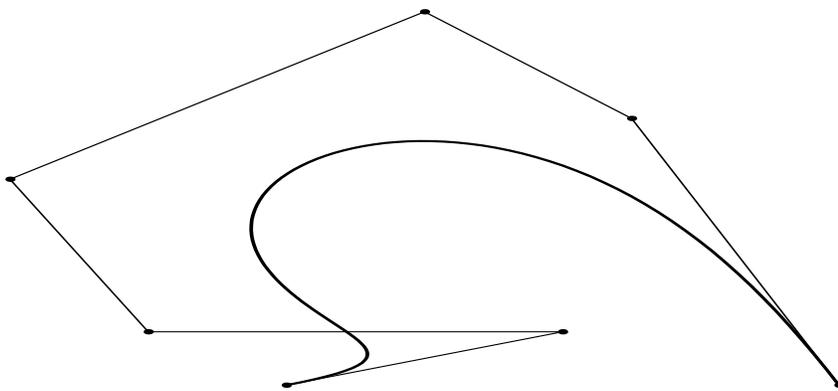


Figure 11

#### 3.2.2 Tangentes aux extrémités :

Comme on le vérifie facilement sur l'ensemble des courbes présentées, les extrémités des courbes de Bézier coïncident avec les extrémités du polygone de contrôle, et les courbes sont tangentes, en ces points, aux premier et dernier côtés du polygone de contrôle.

#### 3.2.3 Diminution de la variation, enveloppe convexe :

Toute droite du plan coupe une courbe de Bézier en au plus le même nombre de points qu'elle coupe le polygone de contrôle de cette courbe (figure 12).

Cette propriété a plusieurs conséquences importantes :

Tout d'abord si tous les points d'un polygone de contrôle sont dans un demi-plan donné (par exemple le demi-plan des  $y$  positifs), alors la courbe de Bézier associée est aussi dans ce demi-plan.

Ensuite, le nombre de racines d'une courbe de Bézier (c'est à dire le nombre de fois que la courbe coupe l'axe des  $x$ ) est inférieur ou égal au nombre de fois que son polygone de contrôle coupe l'axe des  $x$ .

Enfin, toute courbe de Bézier est incluse dans “l’enveloppe convexe” de son polygone de contrôle (l’enveloppe convexe d’un polygone est le plus petit polygone convexe contenant ce polygone) (figure 13).

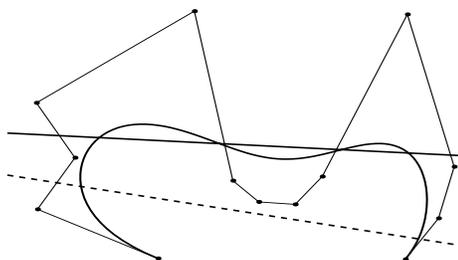


Figure 12

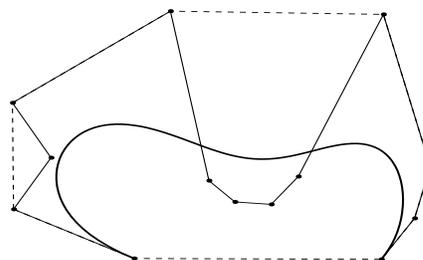


Figure 13

### 3.2.4 Modification d’un point de contrôle

La modification d’un seul point de contrôle est très simple, et ne nécessite que peu de calculs. En effet, si  $C'$  (figure 14, courbe tiretée, associée au polygone tireté) est la courbe de Bézier obtenue à partir de la courbe de Bézier  $C$  (trait plein, associée au polygone en trait plein) en changeant le seul point de contrôle  $P_k$  en un point  $P'_k$ , on a la relation  $C'(t) = C(t) + (P'_k - P_k)B_k^n(t)$ , ce qui est très simple à réaliser, puisque l’on a besoin de ne calculer qu’un seul polynôme de Bernstein,  $B_k^n$ . De sorte qu’un opérateur peut, même avec un ordinateur relativement lent, modifier le point de contrôle, et voir la nouvelle courbe évoluer au fur et à mesure qu’il déplace le point de contrôle.

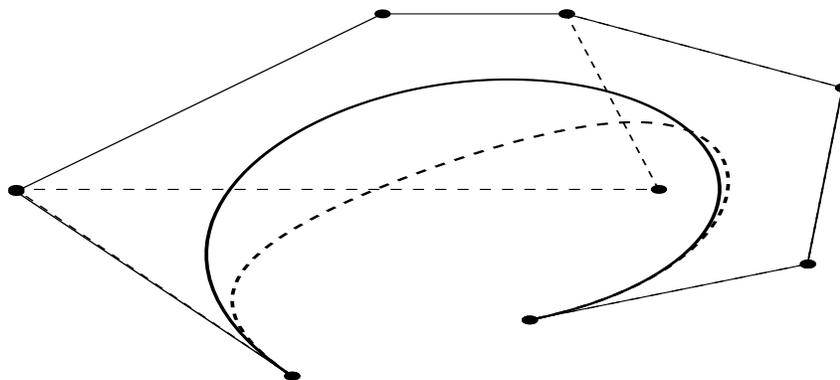
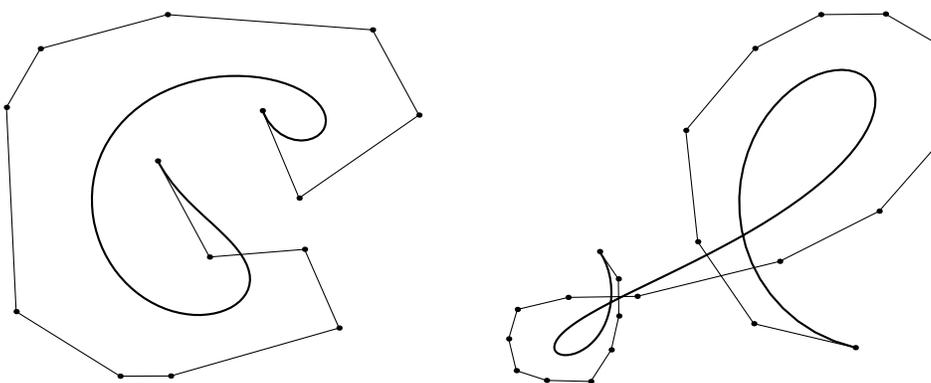
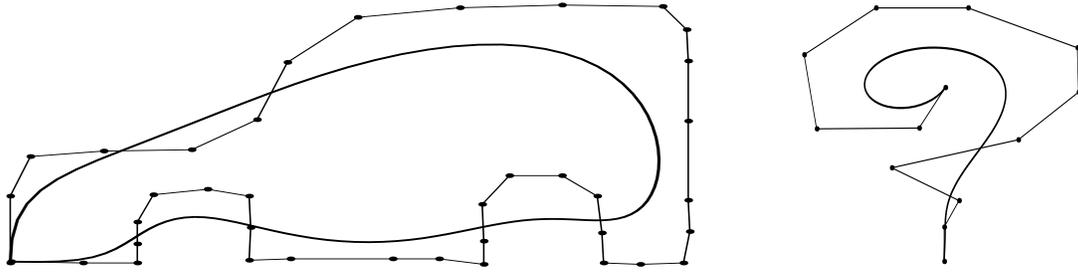


Figure 14

### 3.2.5 Quelques exemples

Voici quelques courbes de Bézier particulières, avec leur polygone de contrôle.





Figures 15

### 3.3 Les surfaces

Comment utiliser les résultats obtenus pour les courbes afin de réaliser les surfaces ? Écoutons d'abord Pierre Bézier, qui s'appuie sur la figure 16 : *“Les mouleurs professionnels pratiquent couramment la méthode dite du “troussage”, qui consiste à mettre en forme le sable d'un noyau à l'aide d'une planche de profil adéquat, que l'on déplace en la guidant sur les bords de la boîte qui le contient (fig. 16). Les configurations ainsi obtenues sont assez simples, car la planche a un profil constant et les bords de la boîte ont généralement une courbure qui évolue peu ; afin d'obtenir des volumes plus variés, on pourrait donner aux bords une forme plus compliquée, mais pour aller plus loin, il faudrait pouvoir modifier le profil de la planche pendant son déplacement”* ([2], p.5).

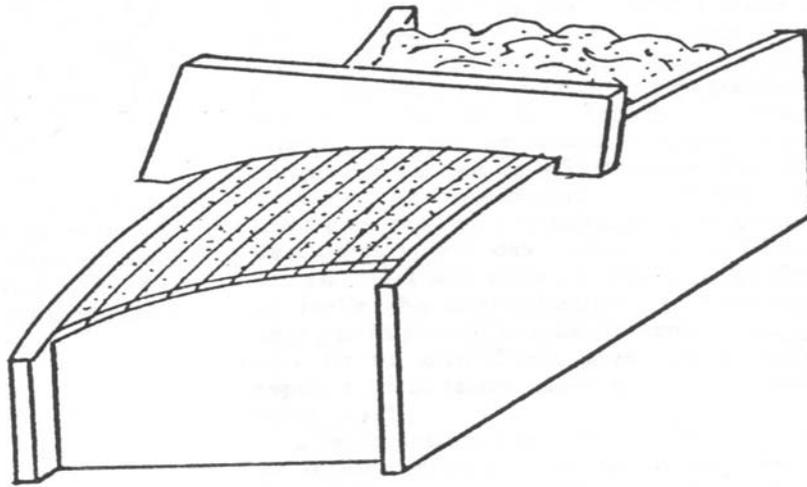


Figure 16

Imaginons maintenant que chaque bord de la boîte soit une courbe de Bézier ; imaginons de plus qu'il y a un certain nombre de guides intermédiaires, parallèles aux bords de la boîte, et que le profil de la planche s'appuie sur ces bords et ces guides intermédiaires, et donc évolue au fur et à mesure qu'on la déplace. On obtiendrait ainsi une surface qui aurait une forme arbitraire, et qui suivrait les différents guides.

C'est exactement ce qui va être fait pour générer les “surfaces de Bézier” : partant des polygones de contrôle de chaque bord et des profils intermédiaires (figure 17a), on calcule les courbes de Bézier correspondantes (figure 17b). On prend maintenant les valeurs de chacune de ces courbes dans la direction perpendiculaire (celle de la planche que l'on déplace), et avec ces valeurs, on définit un polygone de contrôle, puis on définit la courbe

de Bézier relative à ce polygone de contrôle (figure 18). On obtient ainsi une “planche” qui ne s’appuie pas exactement sur les différents profils, mais dont le polygone de contrôle s’appuie sur ce profil. On obtient ainsi une surface telle que celle présentée à la figure 19, à partir d’un “polyèdre de contrôle” (dans l’espace) tel que celui de la figure 20.

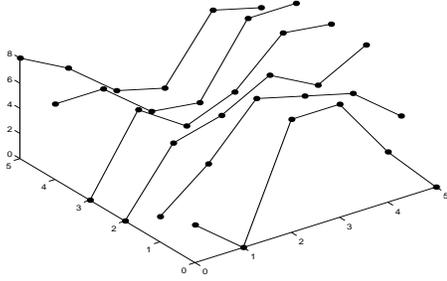


Figure 17a

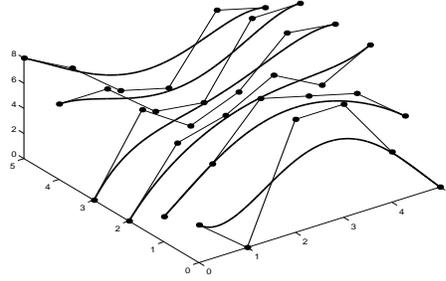


Figure 17b

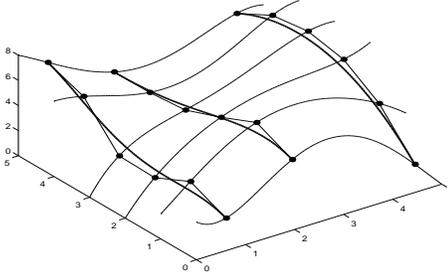


Figure 18

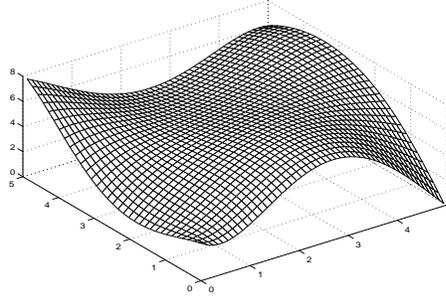


Figure 19

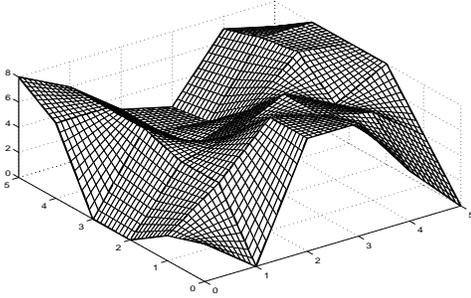


Figure 20

Examinons ce que cela donne du point de vue des équations ( $m$  profils ayant chacun  $n$  points de contrôle) :

Le  $i^{\text{ème}}$  profil s’écrit sous la forme  $C_i(u) = \sum_{j=0}^n P_{ij} B_j^n(u)$ , de sorte que la “planche” au niveau  $u$  a la forme  $S_u(v) = \sum_{i=0}^m C_i(u) B_i^m(v)$ . En faisant maintenant varier  $u$  et  $v$  continûment, on obtient maintenant l’équation de la surface sous la forme  $S(u, v) = \sum_{i=0}^m \left( \sum_{j=0}^n P_{ij} B_j^n(u) \right) B_i^m(v)$ , ce qui peut encore s’écrire

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_j^n(u) B_i^m(v) \quad (\text{D})$$

Accessoirement, du fait que l’on peut permuter les sommations, on voit que la surface ainsi obtenue est exactement la même que si l’on avait créé des profils dans la direction de la planche, et utilisé une planche dans la direction des profils (avec les mêmes points de contrôle). Remarquons qu’en définissant les fonctions  $B_{ij}^{nm}$  par  $B_{ij}^{nm}(u, v) = B_i^n(u) B_j^m(v)$ ,

(D) peut encore s’écrire  $S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{ij}^{nm}(u, v)$ , ce qui est une forme très proche de la forme  $C(t)$  indiquée après (B). On dit que la fonction  $B_{ij}^{nm}$  est obtenue par “produit tensoriel” des fonctions  $B_i^n$  et  $B_j^m$ .

Ceci permet seulement d'obtenir des surfaces de type fonction, et afin d'obtenir des surfaces quelconques (par exemple une surface fermée), on utilise, comme pour les courbes, des "surfaces paramétriques" ; on obtient donc les équations suivantes :

$$\begin{cases} x(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n x_{ij} B_j^n(u) B_i^m(v) \\ y(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n y_{ij} B_j^n(u) B_i^m(v) \\ z(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n z_{ij} B_j^n(u) B_i^m(v) \end{cases} \quad (E)$$

On obtient donc ainsi la même souplesse pour construire des surfaces que pour les courbes. On obtient ainsi des surfaces telles que celle de l'aile d'avion ci-dessous :

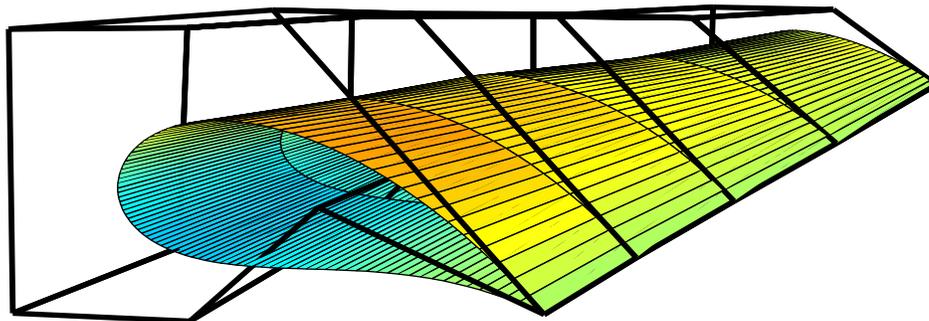


Figure 21

#### 4. Le contexte

Quelques mots maintenant sur le contexte, tant chez Renault que sur le plan national et international, de ce travail :

##### 4.1 Ambiance chez Renault

On l'a vu, la conception de Pierre Bézier était globale : dès le départ, il estimait qu'il était nécessaire de transformer les façons de faire des différents métiers impliqués dans la conception et la fabrication des formes, de façon à ce qu'ils travaillent directement avec ces courbes et ces surfaces. Une telle mise en cause n'était pas facile à accepter, non seulement par les personnes directement concernées, mais aussi par les responsables, qui craignaient une remise en cause profonde des façons de faire qui avaient fait leurs preuves. Par ailleurs, Pierre Bézier était enthousiaste, et souhaitait bien sûr une mise en place aussi rapide que possible...

Rien de surprenant donc que celui-ci ait durement ressenti les réticences, voire les réactions hostiles qu'il a rencontrées. Ainsi par exemple, quand, au stade expérimental (1965), il a demandé 3 MF pour démarrer les tests sur site (achat du matériel de base : machine à dessiner et fraiseuse numériques, ordinateur), et n'a obtenu de Renault que

600 kF (il a dû rechercher ailleurs –DGRST, constructeur d’ordinateurs– le reste de crédit nécessaire), il comparait ces 600 kF à la somme, “bien supérieure”, dépensée pour changer le logo de l’entreprise ([1, p.266]). Il commentait ainsi le déroulement de la réunion (1970) qui devait tirer la conclusion de l’expérimentation des premières formes usinées à l’aide des courbes de Bézier, pour ou bien abandonner le système, ou bien au contraire le généraliser sur toute l’usine, et à laquelle, selon lui, seules deux personnes (Fernand Picard et Yves Georges) se sont clairement exprimées en faveur du système UNISURF, “*les autres assistants furent muets ou évasifs. Considérant qu’il y avait deux avis favorables et treize abstentions, Mr Beullac décida de poursuivre le projet. Il n’est pas impossible que, si les opinions avaient été exprimées à bulletin secret, le résultat eût été quelque peu différent*” ([1,p. 324]).

Tout cela fait que Pierre Bézier trouvait Renault bien “tiède” quant à la mise en oeuvre de ces nouveaux moyens, et avait des mots très durs envers certains responsables de Renault, qu’il trouvait trop craintifs du changement.

Lagrange, un des collaborateurs de Pierre Bézier qui a beaucoup contribué à la mise en place de UNISURF, disait (1984) : “*Alors maintenant c’est parti, mais c’est parti tardivement. C’est parti aujourd’hui, c’est à dire aujourd’hui les patrons ne mettent plus de bâtons dans les roues... Mais c’est pas encore arrivé*” ([6], p.325).

## 4.2 Mise en place chez Renault

Adapter l’idée à la réalité industrielle n’a pas été une mince affaire, et il a fallu tout le génie et l’acharnement de Pierre Bézier et de son équipe pour mener ce travail à bien. En particulier, la question des “raccords” entre des parties différentes était un point très délicat : la plupart des pièces étaient définies par des “morceaux” différents, qu’il fallait raccorder correctement (continuité, continuité des dérivés, ...), ce qui, à plusieurs variables, n’était pas simple. La mise en place concrète de cette méthode de génération de courbes et de surfaces a été longue et délicate, les contraintes spécifiques à la conception et à la fabrication des automobiles étaient nombreuses. Le système mis en place, appelé “système UNISURF” (conception : 1961-1968, premiers tests “grandeur nature” : 1968-1970, développement 1970-1975, puis seconde et troisième génération du système...) utilise les “courbes et surfaces de Bézier”, et les “polynômes de Bernstein”, comme expliqué dans les §2 et 3 ci-dessus.

C’est d’abord en tôlerie que la méthode a été appliquée (la première pièce, conçue de façon expérimentale par ces méthodes, a été le capot de la Dauphine). Les pièces étaient conçues, comme le désirait Pierre Bézier, directement avec les formes de Bézier, dès le bureau d’études. Actuellement, c’est tout au long du processus de conception et de fabrication, du bureau d’études à la chaîne de fabrication, que les formes sont transmises à l’aide de leurs coefficients. On peut dire que tous les services, jusqu’au commercial, utilisent des “images virtuelles”, conçues suivant ces principes. Ainsi, on peut maintenant voir des “photographies” des voitures avant même qu’une seule pièce ne soit fabriquée ; ces “photographies” sont en fait des reconstitutions faites à partir des équations des surfaces considérées.

## 4.3 Paul de Casteljaou chez Citroën

De façon tout à fait surprenante, Paul de Casteljaou, employé par Citroën dès 1958, a défini les mêmes courbes que Pierre Bézier chez Renault. Ceci a été fait de façon complètement indépendante et pratiquement en même temps : la mise en place chez Citroën date des années 1960-1963, et est donc certainement antérieure à la mise en

place chez Renault, mais, d'après Armand Cohen Hadria (entretien, novembre 2000), Pierre Bézier a abordé les "courbes de Bézier" vers 1956, de façon personnelle et isolée. L'approche de Paul de Casteljaou est totalement différente de celle de Pierre Bézier, et elle mérite que l'on s'y attarde un peu.

Le point de départ est une construction purement géométrique, que l'on appelle maintenant "l'algorithme de de Casteljaou". Examinons en quoi cela consiste, et, comme Paul de Casteljaou, partons d'une propriété de la parabole, connue depuis l'antiquité :

Sur la figure 22, la courbe est une parabole, les droites  $AC$  et  $BC$  sont tangentes en  $A$  et  $B$  à cette parabole (les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , sont donc les points de contrôle de cette parabole).  $D$  est le milieu de  $AC$ ,  $E$  est le milieu de  $CB$ , et  $F$  est le milieu de  $DE$ . La propriété est le fait qu'alors la parabole passe par le point  $F$ , et que de plus elle est tangente en ce point à  $DE$  (qui est aussi parallèle à  $AB$ ). La remarque fondamentale est alors la suivante : on se retrouve avec les segments  $AD$  et  $DF$  d'une part, et les segments  $FE$  et  $EB$  d'autre part, exactement dans la même situation que précédemment avec les segments  $AC$  et  $CB$ , de sorte que l'on peut recommencer le processus. En opérant ainsi trois ou quatre fois de suite, on obtient un polygone tellement proche de la parabole que l'on ne peut faire de différence entre la parabole et le polygone. C'est ce qui est montré aux figures 23 (processus effectué deux fois) et 24 (processus effectué trois fois). En outre cette méthode est possible en partageant les segments non pas en parties égales, mais dans une proportion quelconque, pourvu que les rapports  $AD/AC$ ,  $CE/CB$ , et  $DF/DE$  soient égaux.

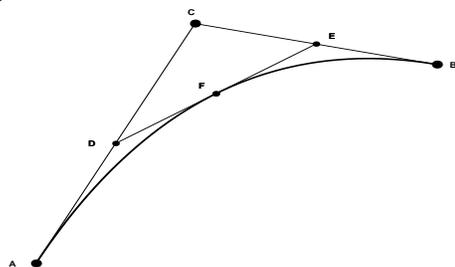


Figure 22

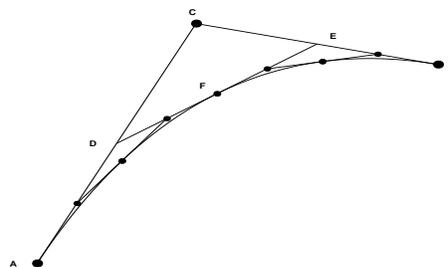


Figure 23

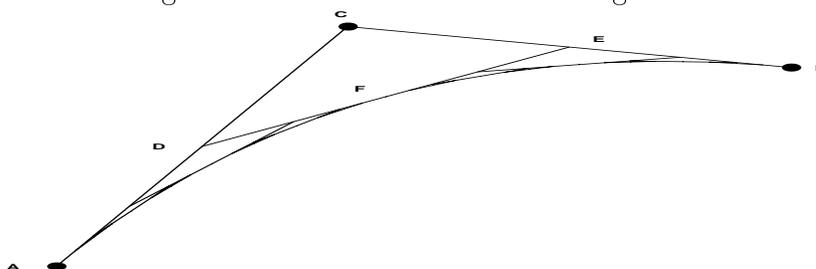
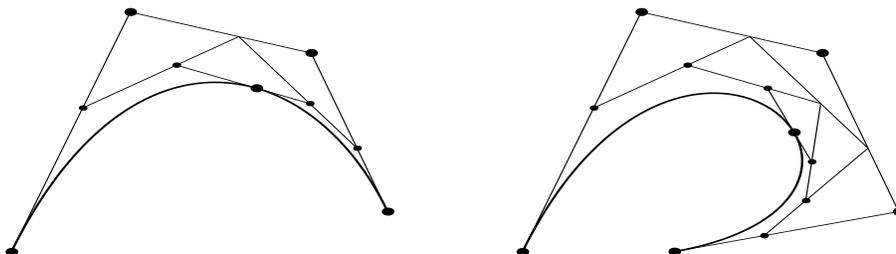


Figure 24

Lorsque l'on a non plus trois points, mais quatre, on peut faire de même, mais en utilisant deux "étages" au lieu d'un seul... ; de même avec cinq points, il faut faire trois "étages" pour partager le polygone de contrôle en deux polygones de contrôle définissant chacun la même courbe, comme montré par les figures suivantes :



En calculant l'équation des courbes ainsi définies, Paul de Casteljaou a alors obtenu directement la forme (C) du §3.1 utilisant les polynômes de Bernstein. Ceci était enseigné à l'école de dessin de Citroën en 1963 ([7]). Cet algorithme a été indépendamment trouvé (en partant des courbes de Bézier) par Daniel Vernet, collaborateur de Pierre Bézier, vers 1969. L'efficacité de cette méthode de calcul a contribué à la généralisation de l'utilisation des courbes de Bézier, qui sont en général calculées par cet algorithme.

Il est tout à fait fascinant, sur le plan scientifique, de voir que ces deux approches si différentes ("déformation des hyper-espaces", et construction géométrique) ont été déterminées de façon complètement indépendantes, pratiquement en même temps, en des lieux géographiquement très proches, dans deux entreprises d'automobiles, et sont arrivées au même résultat.

C'est en 1972 que Pierre Bézier a pris connaissance de cette convergence : *"Il est bien probable que ce sont les techniciens de Citroën qui se sont, les premiers en Europe, intéressés à la définition numérique des surfaces car leurs travaux ont débuté si je ne me trompe, en 1958. C'est avec plaisir que je rends un hommage bien mérité à leur savoir et à leur initiative (...) D'abord, je compris que la conception du mode de représentation des courbes et des surfaces était sortie directement du cerveau de mathématiciens, MM. de Casteljaou et Vercelli, dont j'admire le talent. Ils ont, du premier coup, songé à utiliser les propriétés des fonctions de Bernstein, dont j'ignorais même l'existence, au lieu de se livrer, comme moi, à une laborieuse étude analytique des propriétés des fonctions dont je voulais doter le mode de représentation. Finalement, j'avais abouti au même résultat, mais par un chemin singulièrement cahoteux."* ([1, p.329]).

L'algorithme de de Casteljaou a été à l'origine de généralisations importantes pour générer d'autres courbes et surfaces ; la plus importante porte le nom de "floraison" ("blossom" en anglais) et est présentée dans [6].

#### 4.4 Diffusion à l'extérieur de Renault

En autorisant dès 1968 la diffusion à l'extérieur de l'entreprise de la méthode de conception de formes permettant la mise en place de la commande numérique mise au point par Pierre Bézier, Renault a permis le développement et la renommée des courbes de Bézier. Robin Forrest, du "Computer Aided Design Group", du "Computer Laboratory" de l'Université de Cambridge est certainement un des personnages clefs dans la notoriété de ces idées ; il a été le premier à donner le nom de "Bézier polynomials", et plus tard celui de "Bézier polygons" et "Bézier curves", et à faire le lien avec les polynômes de Bernstein ; il a ensuite traduit en anglais le livre "Emploi des machines à commande numérique" (1970, Masson). Ainsi, Pierre Bézier lui a écrit, en dédicace d'un livre : *"To Robin Forrest, to whom I owe more than he perhaps may realise"* ("à Robin Forrest, à qui je dois probablement davantage qu'il n'imagine") .

C'est ensuite grâce à la SOFERMO, filiale de Renault, que ces méthodes furent exportées hors de Renault, en particulier vers l'industrie aéronautique. La réussite de ces méthodes à l'extérieur a contribué, d'après certains, à son acceptation par les dirigeants de Renault.

Enfin, de nombreux mathématiciens ont développé, généralisé, perfectionné ces méthodes (voir en particulier le § suivant) pour les appliquer ensuite à de très nombreuses utilisations.

## 5. Et maintenant

Examinons ici quelques prolongements maintenant classiques des courbes de Bézier.

### 5.1 Déformation des courbes et des surfaces

Il s'agit ici de déterminer des courbes (resp. des surfaces) intermédiaires permettant une évolution progressive entre une courbe (resp. une surface) de départ, et une courbe (resp. une surface) d'arrivée. Pour cela, l'idée est de déterminer des polygones de contrôle intermédiaires entre le polygone de contrôle de la courbe (ou surface) de départ et celui de la courbe (ou surface) d'arrivée. Ceci est facilement réalisé lorsque les deux courbes ont le même nombre de points de contrôle (figure 27), de la façon suivante :

On relie deux à deux les points de contrôle de la courbe de départ et celui de la courbe d'arrivée. Si l'on désire faire  $k - 1$  courbes intermédiaires, chaque point de contrôle de la  $j^{\text{ème}}$  courbe est situé dans une proportion  $j/k$  des points homologues (figure 28). Sur le plan mathématique, cela s'écrit sous la forme suivante, si  $P_i^j$  est le  $i^{\text{ème}}$  point de contrôle de la  $j^{\text{ème}}$  courbe intermédiaire (et  $P_i^0$  le  $i^{\text{ème}}$  point de contrôle de la courbe de départ,  $P_i^k$  le  $i^{\text{ème}}$  point de contrôle de la courbe d'arrivée) :

$$P_i^j = (1 - j/k) P_i^0 + (j/k) P_i^k$$

Les férus de mathématiques remarqueront qu'en conséquence, si  $C^j$  est la  $j^{\text{ème}}$  courbe intermédiaire (et  $C^0$  la courbe de départ,  $C^k$  la courbe d'arrivée), on a alors, pour tout  $t$ ,

$$C^j(t) = (1 - j/k) C^0(t) + (j/k) C^k(t)$$

On obtient ainsi  $k - 1$  polygones de contrôle intermédiaires (figure 29), et donc  $k - 1$  courbes intermédiaires (figures 30 et 31, puis 32 avec un nombre de courbes plus important). En représentant ces différentes courbes au cours du temps, on a tout à fait l'impression d'une "déformation" de la courbe.

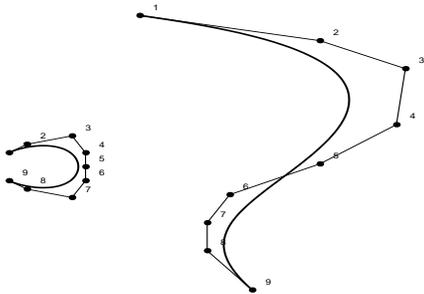


Figure 27

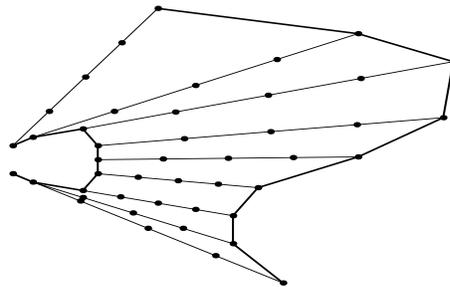


Figure 28

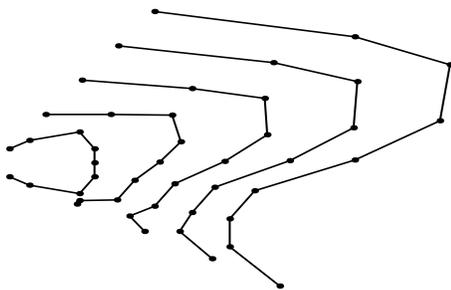


Figure 29

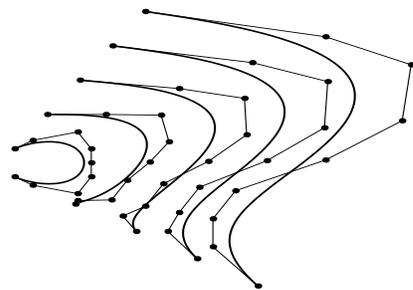


Figure 30

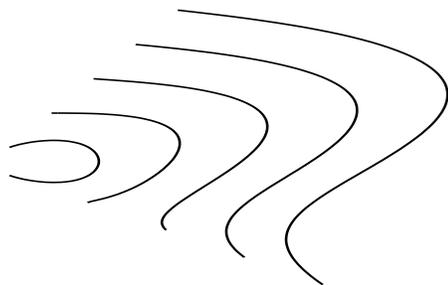


Figure 31

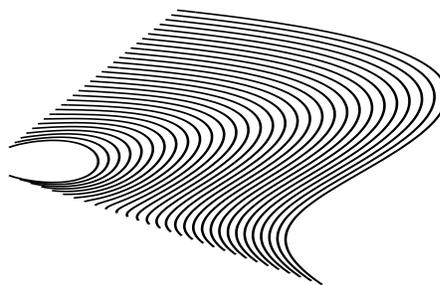


Figure 32

## 5.2 Fractions rationnelles

Les polynômes, même en paramétrique, ne permettent pas de représenter toutes les courbes désirées. Pour augmenter la gamme de courbes possibles, on utilise souvent des fractions rationnelles au lieu des polynômes ; cela permet, en particulier, de contraindre la courbe obtenue à passer plus près (ou au contraire plus loin) de certains points de contrôle. Pour cela, on affecte à chaque point de contrôle  $P_i$  un “poids”  $\alpha_i$  positif ; plus on désire que la courbe soit proche du point  $P_i$ , plus il faut donner une valeur importante à  $\alpha_i$ . On définit alors  $C(t)$  sous la forme :

$$C(t) = \begin{cases} x(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \alpha_i x_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \alpha_i B_i^n(t)} \\ y(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \alpha_i y_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \alpha_i B_i^n(t)} \end{cases}$$

ce que l'on écrit aussi :

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \alpha_i P_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \alpha_i B_i^n(t)}$$

On remarquera que  $C(t)$  reste de la forme précédente, en changeant chaque  $B_i^n(t)$  en  $\alpha_i B_i^n(t) / \sum_{j=0}^n \alpha_j B_j^n(t)$ . De plus, comme on a la propriété  $\sum_{j=0}^n B_j^n(t) = 1$ , si tous les  $\alpha_i$  sont égaux, on retrouve la courbe de Bézier traditionnelle.

Ceci permet d'obtenir des courbes telles que celles de la figure 33 (les  $\alpha_i$  sont tous égaux à 1, sauf ceux des points marqués **a** pour les courbes **A**, et sauf ceux des points marqués **b** pour les courbes marquées **B** (les courbes non marquées sont les courbes de Bézier). Les  $\alpha_i$  en question sont alors égaux à 10.

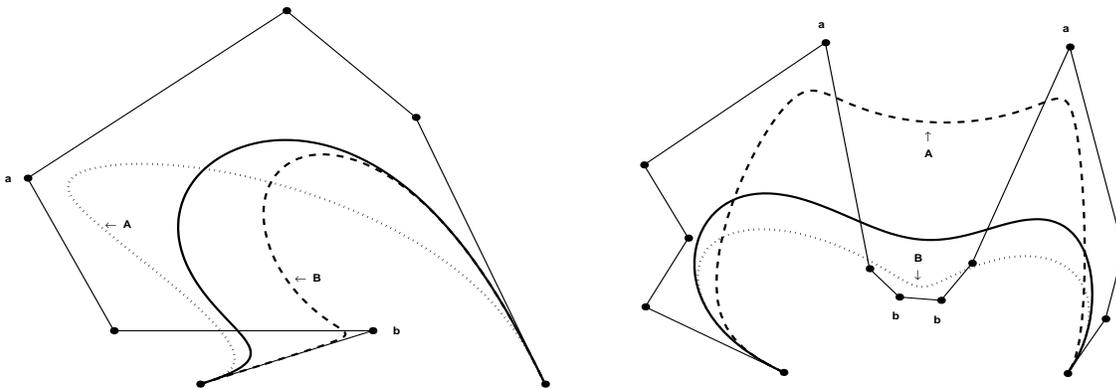


Figure 33

On fonctionne bien sûr de la même façon avec les surfaces, pour obtenir des surfaces dont les équations sont :

$$\begin{aligned}
x(u, v) &= \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} x_{ij} B_j^n(u) B_i^m(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} B_j^n(u) B_i^m(v)} \\
y(u, v) &= \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} y_{ij} B_j^n(u) B_i^m(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} B_j^n(u) B_i^m(v)} \\
z(u, v) &= \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} z_{ij} B_j^n(u) B_i^m(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} B_j^n(u) B_i^m(v)}
\end{aligned}$$

### 5.3 Courbes B-splines

Il s'agit maintenant d'obtenir davantage de souplesse pour les courbes. En effet, les polynômes sont des fonctions “rigides”, ce qui à vrai dire convient très bien pour définir des surfaces de carrosserie, ou d'avion, qui sont très “tendues”. Mais lorsqu'il s'agit de représenter des scènes de jeux vidéo, par exemple, les surfaces représentées ne sont pas assez “souples”. Par ailleurs, on l'a vu au §4.2 ci-dessus, les “raccords” entre courbes obtenues par des polynômes différents posent de gros problèmes, tout simplement car, dans la conception des courbes de Bézier, les polynômes sont conçus de façon indépendante les uns des autres. La solution adoptée consiste à remplacer les polynômes de Bernstein par des fonctions particulières, qui sont des morceaux de polynômes juxtaposés, et présentant une régularité suffisante. On obtient ainsi des courbes, appelées “courbes B-spline”, qui ont la même régularité que ces fonctions, qui sont simples à calculer (morceaux de polynômes), qui présentent une souplesse bien supérieure aux courbes de Bézier, et dont les problèmes de “raccord” sont résolus par la nature même des fonctions de base. Pour ne pas rentrer dans les détails, nous donnons simplement ici la définition des fonctions  $B_i$ , appelées “B-splines”, qui vont remplacer les polynômes de Bernstein. On peut utiliser des fonctions B-spline de différents “degré”, qui ont des propriétés légèrement différentes suivant le degré utilisé. Dans les expressions suivantes,  $[u]$  vaut 0 si  $u$  est négatif,  $u$  si  $u$  est positif ; pour les degrés impairs, on peut aussi remplacer  $[u]$  par  $|u|$ , c'est à dire la valeur absolue de  $u$ , et diviser le résultat global par 2.

$$\text{degré 2 : } B_i(t) = n^2 ([t - (i + 3/2)/n]^2 - 3[t - (i + 1/2)/n]^2 + 3[t - (i - 1/2)/n]^2 - [t - (i - 3/2)/n]^2)/2$$

$$\text{degré 3 : } B_i(t) = n^3 ([t - (i + 2)/n]^3 - 4[t - (i + 1)/n]^3 + 6[t - i/n]^3 - 4[t - (i - 1)/n]^3 - [t - (i - 2)/n]^3)/6$$

$$\text{degré 4 : } B_i(t) = n^4 ([t - (i + 5/2)/n]^4 - 5[t - (i + 3/2)/n]^4 + 10[t - (i + 1/2)/n]^4 - 10[t - (i - 1/2)/n]^4 + 5[t - (i - 3/2)/n]^4 - [t - (i - 5/2)/n]^4)/24$$

$$\text{degré 5 : } B_i(t) = n^5 ([t - (i + 3)/n]^5 - 6[t - (i + 2)/n]^5 + 15[t - (i + 1)/n]^5 - 20[t - i/n]^5 + 15[t - (i - 1)/n]^5 - 6[t - (i - 2)/n]^5 + ([t + (i + 3)/n]^5))/120$$

On remarque facilement que si  $k$  est le degré de la B-spline, et si  $|t - i/n| > (k - 1)/n$ , alors  $B_i(t) = 0$ , relation que l'on a intérêt à utiliser plutôt que la forme ci-dessus, pour éviter de faire des calculs inutiles. Une représentation graphique des B-splines de degré 3 pour  $n = 16$ , ainsi que les polynômes de Bernstein de degré 18, est présentée en [6, fig. 14].

Il convient cependant de modifier l'expression des B-splines des extrémités, afin que la courbe ait un comportement satisfaisant aux extrémités. La façon la plus simple de faire est de rajouter des points de contrôle “fictifs”, d'indices  $-1$ , et  $n + 1$  pour les ordres 3 et 4, d'indices  $-1$ ,  $-2$ ,  $n + 1$ ,  $n + 2$  pour les ordres 5 et 6, et d'inclure ces indices dans les sommes définissant la courbe B-spline. Les points ainsi ajoutés doivent avoir les valeurs  $P_{-1} = 2P_0 - P_1$ ,  $P_{-2} = 3P_0 - 2P_1$ ,  $P_{n+1} = 2P_n - P_{n-1}$ ,  $P_{n+2} = 3P_n - 2P_{n-1}$

(ici, par exemple,  $P_{-1}$  désigne le point  $P$  (“fictif”) d’indice  $-1$ ). D’autres façons de gérer les extrémités sont fréquemment employées, mais ne sont pas présentées ici en détail. Rapidement dit, on utilise souvent des “points multiples” aux extrémités, c’est à dire que les points fictifs ajoutés sont  $P_{-2} = P_{-1} = P_0$  et  $P_{n+2} = P_{n+1} = P_n$  ; lorsque l’on désire obtenir des courbes fermées, qui n’ont pas de point particulier en début et en fin de courbe (au point de raccord), on utilise un prolongement périodique ( $P_{-2} = P_{n-2}$ ,  $P_{-1} = P_{n-1}$ ,  $P_{n+1} = P_1$ ,  $P_{n+2} = P_2$ ) ; à noter que de telles courbes fermées ne sont pas réalisables avec les courbes de Bézier.

Enfin, on utilise aussi couramment des B-splines à nœuds non équidistants (les nœuds sont les valeurs qui annulent les quantités entre [ et ] dans les définitions des  $B_i$ , et sont donc équidistants dans la présentation ci-dessus puisque ce sont des entiers ou des demi-entiers). Par souci de simplicité les B-splines à nœuds non équidistants ne sont pas présentées ici.

La figure 34 présente deux exemples de polygones de contrôle, avec les courbes de Bézier associées (tirets) et les courbes B-spline d’ordre 4 associées (traits pleins). On constate facilement que les courbes B-spline passent beaucoup plus près de leur polygone de contrôle que les courbes Bézier.

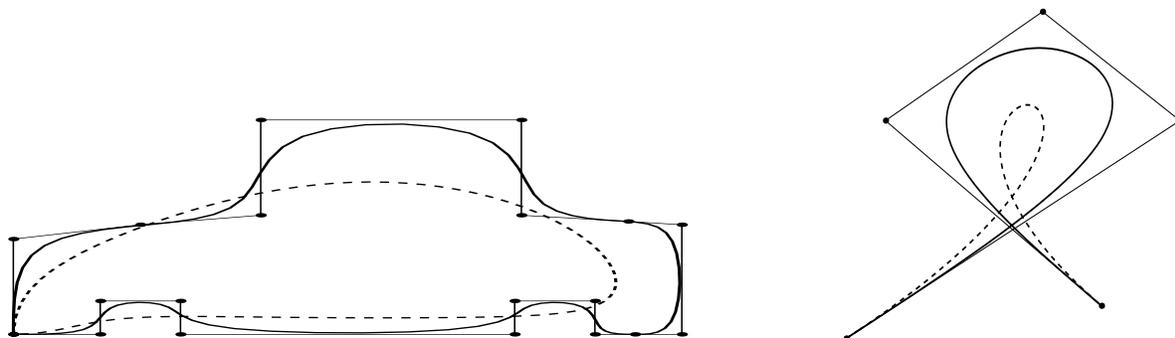


Figure 34

#### 5.4 “NURBS”

Les “NURBS” (“Non Uniform Rational B-Splines”) consistent à appliquer à la fois l’extension des B-splines (à nœuds non équidistants : “Non Uniform”), et celles des fractions rationnelles (“Rational”). Ceci revient donc à utiliser les formules (D) du §5.2, où les polynômes de Bernstein  $B_i^n$  sont remplacés par les B-splines (à nœuds non équidistants)  $B_i$ . On obtient ainsi pratiquement toutes les formes que l’on veut. En voici deux exemples, avec les mêmes conventions que pour la figure 33 :

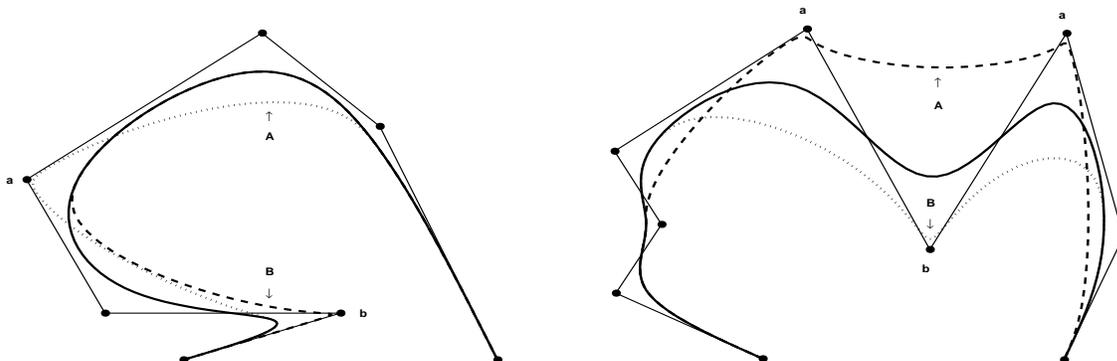


Figure 35

Bien sûr les B-splines comme les NURBS permettent de définir des surfaces de façon analogue à ce qui a été présenté pour les surfaces de Bézier au §3.3. On obtient ainsi les

équations (D) (surfaces de type fonction) ou (E) (surfaces paramétriques) du §3.3, où les  $B_i^n$  et les  $B_j^n$  ne sont plus les polynômes de Bernstein (équations (B) du §3.1) mais les B-splines définies au §5.3. Les NURBS sont aussi appelées courbes (ou surfaces) B-spline rationnelles.

### 5.5 Autres bases permettant de générer des courbes

On peut encore utiliser bien d'autres fonctions  $B_i^n$ , qui permettent de générer d'autres courbes, dont les propriétés peuvent intéresser inégalement des utilisateurs différents. Ceci (floraisons, espaces de Čebyšev) est présenté en détail dans [6].

### 5.6 Domaines d'utilisation

Les avantages de la méthode sont nombreux : précision des informations transmises (pas besoin de lire un plan, de façon plus ou moins précise), transmission facile, agrandissement aisé et surtout précis (la définition d'une courbe par ses équations permet un d'effectuer un "zoom" sur une partie de la courbe, sans pour autant amplifier des erreurs qui seraient dues par exemple à la précision du tracé), bonnes propriétés géométriques, et modification facile d'un point de contrôle, avec une conséquence "naturelle" sur la forme de la courbe et des calculs rapides, ce qui est précieux en particulier dans le cadre de la CAO. Pour les applications des jeux vidéos, le fait de ne manipuler que les points de contrôle (par exemple pour effectuer une rotation ou une translation d'un objet), permet une simplification précieuse pour le temps de calcul, ce qui est nécessaire pour la représentation de scènes dynamiques.

Tout cela fait que Pierre Bézier est considéré comme le père de la CAO, tant sur son principe (utiliser la formulation mathématique dès la conception des formes), que par les outils qu'il a apportés. Les applications sont très nombreuses, en particulier pour tout ce qui est conception de formes particulières ou d'objets de la vie courante (carafes, verres par exemple), pour tout ce qui est représentation de scènes numériques. La plupart des jeux vidéos utilisent ces techniques (en général des NURBS).

De nombreux logiciels utilisent ces techniques pour permettre la conception de formes personnalisées, éventuellement l'exploitation scientifique des formes ainsi définies (comme le calcul de la résistance de l'objet, la portance d'une aile d'avion, le poids de la pièce, son coût...), ce qui est souvent effectué "en direct", au fur et à mesure que l'utilisateur modifie la forme qu'il définit.

Mentionnons en particulier l'outil informatique [5], à but ludique et pédagogique, permettant de construire et visualiser toute courbe et toute surface de Bézier, Bézier rationnelle, B-spline, ou B-spline rationnelle. A l'aide de ce petit logiciel, on peut aussi modifier ces courbes et ces surfaces en "conversationnel", et les comparer entre elles ; on peut aussi visualiser la déformation des courbes et des surfaces ("Morphing", voir §5.1). Cet outil permet une sensibilisation aux techniques des courbes de Bézier et aide à acquérir une intuition à leur propos ; c'est en utilisant la première version de ce logiciel que certaines courbes ont été présentées le 30 novembre à l'ENSAM. L'utilisation, la duplication, et la diffusion gratuite de ce logiciel sont libres et encouragées.

## 6. Conclusion

Au point de départ de la CAO, Pierre Bézier a apporté les outils, mais aussi la démarche, qui a permis à la CAO de se développer. Ce n'est pas seulement sa capacité technique, mais aussi sa personnalité, son charisme et son sens de la communication,

qui ont contribué au développement de ses idées et à l'ampleur qu'elles ont maintenant. Certes, les courbes de Bézier proprement dites ont en général cédé la place à des outils plus efficaces (courbes de Bézier rationnelles, et surtout courbes B-splines et NURBS), mais les idées qu'il a mises en avant (utilisation de ces outils dès la conception des formes, jusqu'à leur fabrication, points de contrôle permettant de déterminer ou de modifier les courbes) sont maintenant tellement répandues qu'elles sont considérées comme élémentaires.

C'est ainsi qu'à la fin de sa vie Pierre Bézier résumait ses principales idées forces :

*“En fin de compte, les idées favorables qui m'ont guidé, et dont je n'ai pas l'exclusivité, se résument ainsi :*

- 1. Ne pas chercher à recopier un objet (2D ou 3D) ou à perfectionner une méthode existante.*
- 2. Choisir une représentation paramétrique polynomiale, ce qui permet de modifier la forme d'une courbe ou d'une collection de surfaces en faisant varier seulement celle de leur référentiel.*
- 3. Représenter un référentiel en mettant bout à bout ses vecteurs unité, au lieu de leur donner une origine commune.*

*Tout cela n'est pas bien compliqué, et je suis surpris que d'autres n'en aient pas eu l'idée depuis longtemps. Sans doute ai-je bénéficié d'une formation dans laquelle la géométrie tenait une plus grande place que dans celle d'aujourd'hui et de conduire mon raisonnement en me représentant des figures plutôt qu'une famille d'équations” ([3]).*

Il est clair que Pierre Bézier a devancé les changements, et en cela il était un précurseur au plein sens du terme.

Il mérite notre admiration pour sa ténacité, la qualité de ses analyses, sa clairvoyance et sa capacité à voir les choses “autrement”, pour son esprit ingénieur et son esprit maison, pour son sens de la communication enfin.

## References

- [1] **Pierre Bézier**, 1982, “*Petite histoire d'une idée bizarre (1)*”, tome 4, no 24, pp. 256–268, et tome 4, no 25, pp. 319–321. Disponible sur <http://www.gmm.insa-tlse.fr/~rabut/bezier>
- [2] **Pierre Bézier**, Juin 1983, “*Imaginatique, inventique, créatique, innovatique, systémique, productique, etc.*”, Arts et Métiers Magazine. Disponible sur <http://www.gmm.insa-tlse.fr/~rabut/bezier>
- [3] **Pierre Bézier**, 4 et 14 novembre 1999 : Deux lettres envoyées par Pierre Bézier à Christophe Rabut récapitulant l'essentiel de ses motivations et des circonstances de la mise en place du système UNISURF. Ces deux lettres sont disponibles sur <http://www.gmm.insa-tlse.fr/~rabut/bezier>, et seront publiées, avec quelques notes explicatives, dans Computer Aided Design, sous le titre *On life and motivations of Pierre Bézier*
- [4] **Robin Forrest**, 1972, *Interactive Interpolation and approximation by Bézier polynomials*, The Computer Journal, Vol 15, no.1, pp. 71–79. (première publication en rapport technique de l'université de Cambridge en juin 1970, et republication dans le numéro special de Computer Aided Design consacré aux techniques de Bézier : vol.22, no.9, pp. 521–607, Novembre 1990).

- [5] **Daniel Frouvelle, Christophe Rabut**, 2001, Logiciel de présentation et de comparaison des courbes et des surfaces Bézier, Bézier rationnelles, B-spline et B-spline rationnelles. Ce logiciel est écrit en Visual Basic, mais le fichier exécutable étant fourni, il est inutile de disposer de Visual Basic pour l'exécuter. Disponible sur <http://www.dfrouvelle.fr.st> (rubrique "pédagogie, outils mathématiques").
- [6] **Pierre-Jean Laurent, Marie-Laurence Mazure**, 2001, *Contrôle de Courbes et Paramètres de Forme*, Actes de la journée en hommage à Pierre Bezier (30 novembre 2000), ENSAM, 151, Bd de l'hôpital, 75013 PARIS.
- [7] **Jean-Pierre Poitou**, 1988, *Le cerveau de l'usine. Histoire des bureaux d'études Renault de l'origine à 1980*, Publications of Université de Provence, 29, av. R. Schuman, 13621 Aix-en-Provence.
- [8] **Jean-Pierre Poitou**, 1989 "*Trente ans de CAO en France*", Hermès, Paris.

*Christophe Rabut*  
*Institut National des Sciences Appliquées,*  
*Département de Génie Mathématique,*  
*Mathématiques pour l'industrie et la Physique, UMR 5640,*  
*135 avenue de Rangueil*  
*31077 TOULOUSE Cedex 04, France*  
`rabut@gmm.insa-tlse.fr`